PART3　$\pm\infty$に発散，右極限と左極限

要点整理と公式

要点 ①　正の無限大に発散，負の無限大に発散

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば，$f(x)$ は「　　　　　　　」するといい

$\lim_{x\to a} f(x)=$　　　　　または　　$x\to a$ のとき $f(x)\to$

と表す。

また，関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が負でその絶対値が限りなく大きくなるならば，$f(x)$ は「　　　　　　　」するといい

$\lim_{x\to a} f(x)=$　　　　　または　　$x\to a$ のとき $f(x)\to$

と表す。

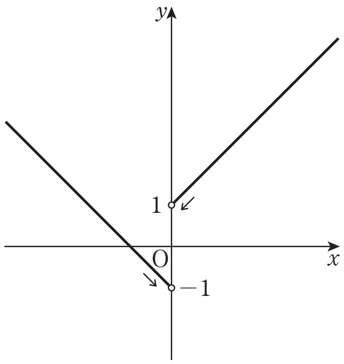
(ex) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=$　　　　　$\lim_{x\to 2}\left\{-\frac{1}{(x-2)^2}\right\}=$

要点 ②　片側からの極限

関数 $f(x)=\frac{x(x+1)}{|x|}$ について，$x\to 0$ のときの極限を考える。

$x>0$ のとき $f(x)=\frac{x(x+1)}{x}=x+1$

$x<0$ のとき $f(x)=\frac{x(x+1)}{-x}=-x-1$



x が 0 より大きい値をとりながら限りなく 0 に近づくと，$f(x)$ の値は限りなく 1 に近づく。

x が 0 より小さい値をとりながら限りなく 0 に近づくと，$f(x)$ の値は限りなく -1 に近づく。

よって，x の 0 への近づき方によって $f(x)$ が近づく値が異なるので，$x\to 0$ のときの $f(x)$ の極限は存在しない。

x が a より大きい値をとりながら限りなく a に近づくことを　$x \to a$

x が a より小さい値をとりながら限りなく a に近づくことを　$x \to a$

と表す。特に $a=0$ のときは，それぞれ $x \to$　　，$x \to$　　と表す。

$x \to a$　　のときの関数 $f(x)$ の極限を，x が a に近づくときの $f(x)$ の「　　(側)極限」

といい，$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)$ と表す。上記の例だと，$\displaystyle\lim_{x \to} f(x)=1$ である。

$x \to a$　　のときの関数 $f(x)$ の極限を，x が a に近づくときの $f(x)$ の「　　(側)極限」

といい，$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)$ と表す。上記の例だと，$\displaystyle\lim_{x \to} f(x)=-1$ である。

$\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x \to a-0} f(x)$ の両方が存在し，それらが一致するとき，$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)$ が存在する。

一般に，次のことが成り立つ。

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha \iff \lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

右極限が正の無限大，負の無限大になる場合は，それぞれ次のように表す。

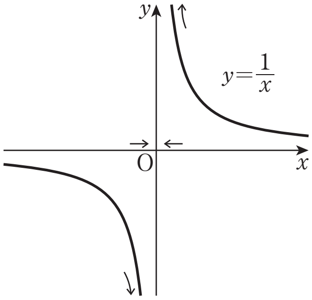
$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty$$

左極限の場合も同様に表す。

(ex) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ について

$\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x)=$

$\displaystyle\lim_{x \to -0} f(x)=$



3 (1) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$ (iii) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{3x+2}{(x+1)^2}$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x \to -1+0} \frac{|x+1|}{x+1}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x \to -1-0} \frac{|x+1|}{x+1}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x \to 2+0} \left(\frac{2}{x-2} + 1\right)$ (iv) $\displaystyle\lim_{x \to 2-0} \left(\frac{2}{x-2} + 1\right)$

Point Pickup

±∞に発散

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき

$f(x)$ の値が限りなく大きくなる場合（正の無限大に発散）

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad (x \to a \text{ のとき } f(x) \to \infty)$$

$f(x)$ の値が負でその絶対値が限りなく大きくなる場合（負の無限大に発散）

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad (x \to a \text{ のとき } f(x) \to -\infty)$$

右極限と左極限

右極限：$x \to a+0$（$x > a$ で，$x \to a$）のときの $f(x)$ の極限。$\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x)$ と表す。

左極限；$x \to a-0$（$x < a$ で，$x \to a$）のときの $f(x)$ の極限。$\displaystyle\lim_{x \to a-0} f(x)$ と表す。

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha \iff \lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

第 5 講　PART3 確認問題

次の極限を求めよ。答えは下の①～⑦のうちから選べ。

1 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}$ 　ア

①　0　②　$\frac{1}{2}$　③　1

④　-1　⑤　∞　⑥　$-\infty$

⑦　極限はない

2 $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$ 　イ

①　0　②　$\frac{1}{2}$　③　1

④　-1　⑤　∞　⑥　$-\infty$

⑦　極限はない

3 $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x+1}{(x-3)^2}$ 　ウ

①　0　②　$\frac{1}{2}$　③　1

④　-1　⑤　∞　⑥　$-\infty$

⑦　極限はない

4 $\displaystyle\lim_{x\to2+0}\frac{|x-2|}{x-2}$ 　エ

①　0　②　$\frac{1}{2}$　③　1

④　-1　⑤　∞　⑥　$-\infty$

⑦　極限はない

5 $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\frac{|x-2|}{x-2}$ **オ**

① 0　② $\dfrac{1}{2}$　③ 1

④ -1　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

⑦ 極限はない

6 $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\left(\frac{2}{x-1}+1\right)$ **カ**

① 0　② $\dfrac{1}{2}$　③ 1

④ -1　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

⑦ 極限はない

7 $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{2}{x-1}+1\right)$ **キ**

① 0　② $\dfrac{1}{2}$　③ 1

④ -1　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

⑦ 極限はない

[MEMO]

PART3　±∞に発散，右極限と左極限

3　(1)　次の極限を求めよ。

(i)　$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{1}{(x-3)^2}$　(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)$　(iii)　$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{3x+2}{(x+1)^2}$

(2)　次の極限を求めよ。

(i)　$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}\frac{|x+1|}{x+1}$　(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to-1-0}\frac{|x+1|}{x+1}$

(iii)　$\displaystyle\lim_{x\to2+0}\left(\frac{2}{x-2}+1\right)$　(iv)　$\displaystyle\lim_{x\to2-0}\left(\frac{2}{x-2}+1\right)$

[解答]

(1)(i)　$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{1}{(x-3)^2}=\infty$　(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)=\infty$　(iii)　$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{3x+2}{(x+1)^2}=-\infty$

(2)(i)　$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}\frac{|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to-1+0}\frac{x+1}{x+1}=1$　(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to-1-0}\frac{|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to-1-0}\frac{-(x+1)}{x+1}=-1$

(iii)　$\displaystyle\lim_{x\to2+0}\left(\frac{2}{x-2}+1\right)=\infty$　(iv)　$\displaystyle\lim_{x\to2-0}\left(\frac{2}{x-2}+1\right)=-\infty$

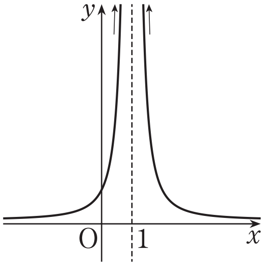
第 5 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑤

[解説]

$y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ のグラフは，次のようになる。



[A]

よって，$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$

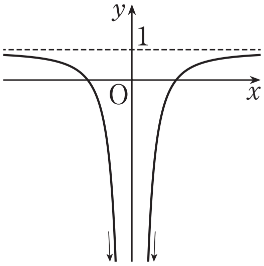
[A]　$x\to1+0$，$x\to1-0$ のいずれも $y\to\infty$ となる。

2

[正解] イ：⑥

[解説]

$y=1-\dfrac{2}{x^2}$ のグラフは，次のようになる。



[B]

よって，$\displaystyle\lim_{x\to0}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)=-\infty$

[B]　$x\to+0$，$x\to-0$ のいずれも $y\to-\infty$ となる。

3

[正解] ウ：⑤

[解説]

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x+1}{(x-3)^2}=\infty$ [C]

[C]　$y=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ では，$x\to3+0$，$x\to3-0$ のいずれも $y\to\infty$ となる。

4　**[正解]** エ：③

[解説]

$x>2$ のとき，[D]

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2+0}\frac{x-2}{x-2}=\mathbf{1}$$

[D]　$x\to 2+0$（右側極限）であるから，$x>2$ の場合を考える。

5　**[正解]** オ：④

[解説]

$x<2$ のとき，[E]

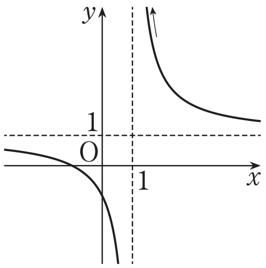
$$\lim_{x\to 2-0}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}\frac{-(x-2)}{x-2}=\mathbf{-1}$$

[E]　$x\to 2-0$（左側極限）であるから，$x<2$ の場合を考える。

6　**[正解]** カ：⑤

[解説]

$y=\dfrac{2}{x-1}+1$ のグラフは，次のようになる。



[F]

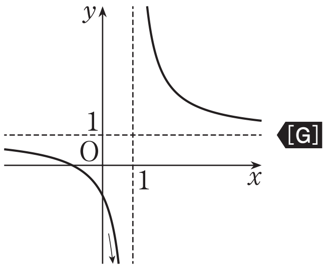
[F]　$x\to 1+0$（右側極限）であるから，1 より大きい値をとりながら 1 に近づける。

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\left(\frac{2}{x-1}+1\right)=\infty$

7　**[正解] キ：⑥**

[解説]

$y=\dfrac{2}{x-1}+1$ のグラフは，次のようになる。



[G]　$x \to 1-0$(左側極限)であるから，1より小さい値をとりながら1に近づける。

よって，$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\left(\frac{2}{x-1}+1\right)=-\infty$